SEMESTRAL

UNI

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Ecuaciones polinomiales II

Docente: Gustavo Poma Quiroz

academiacesarvallejo.edu.pe

Ecuaciones Polinomiales de grado superior

Sea el polinomio $P_{(x)}$ de grado 3 o más, una ecuación polinomial de grado superior es :

$$P_{(x)} = 0$$

Ejemplos:

- $2x^3 + x^2 + x - 4 = 0$ Ecuación cúbica.
- $x^4 + x^3 + x - 3 = 0$ Ecuación cuártica.
- $x^5 + 2x^3 + x + 4 = 0$ Ecuación de grado 5.

Su resolución

Se sugiere tratar de factorizar el polinomio (factor común, divisores binómicos, …) hasta obtener factores lineales o cuadráticos, de donde será fácil hallar las soluciones.

Ejercicio

Resolver la siguiente ecuación

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

Resolución

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2(x+3) - 4(x+3) = 0$$

$$(x+3)(x^2-4) = 0$$

$$(x+3)(x-2)(x+2) = 0$$

$\rightsquigarrow x+3=0 \vee x-2=0 \vee x+2=0$

$x=-3 \vee x=2 \vee x=-2$

$$C.S. = \{-3; 2; -2\}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Encuentre la suma de las soluciones no reales de

$$6x^3 - 5x^2 + 4x - 15 = 0$$

Resolución

factorizando por Divisores Binómicos

Por Ruffini

	6	−5	4	−15
$x=3/2$	↓	9	6	15
	6	4	10	0

raíz

$P(x)=(2x-3)(3x+1-\sqrt{14}i)(3x+1+\sqrt{14}i)$

$P.R.R = \pm\left\{\frac{Div/TI}{Div/CP}\right\} = \pm\left\{\frac{1,3,5,15}{1,2,3,6}\right\}$

$(x-\frac{3}{2})(6x^2+4x+10)=0$

$(\frac{2x-3}{2})2(3x^2+2x+5)=0$

$(2x-3)(3x^2+2x+5)=0$

$\Delta<0$

Tiene sol. no reales.

Suma sol. no reales $= -\frac{2}{3}$

Aplicación

Resolver la siguiente ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Resolución

factorizando por Aspa doble especial.

$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

$x^2 \quad -5x \quad 6 \rightarrow 6x^2$

$x^2 \quad 0x \quad -1 \rightarrow -x^2$

$0x^2 \leftarrow 5x^2$ (−)

$(x^2-5x+6)(x^2-1)=0$

$(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)=0$

raíces: $3; 2; 1; -1$

$CS=\{3; 2; 1; -1\}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMA DE CARDANO

Las raíces de una ecuación polinomial se puede relacionar numéricamente con sus coeficientes.

- Sea x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; \quad a \neq 0$$

+ − + −

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$

- $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \dfrac{c}{a}$

- $x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{d}{a}$

Aplicación

Dada la ecuación cubica $x^3 - 7x^2 + 4x + 5 = 0$ cuyas raíces son $a; b; c$, halle el valor de

$$K = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$$

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) $\frac{5}{7}$

Resolución

$+x^3 - 7x^2 + 4x + 5 = 0$ (+ − + −)

Por Cardano

- $a + b + c = 7$
- $ab + bc + ac = 4$
- $abc = -5$

Nos piden

$$K = \frac{1a}{bca} + \frac{1b}{cab} + \frac{1c}{abc} = \frac{a+b+c}{abc}$$

$$\therefore K = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

- Sea x_1, x_2, x_3 y x_4 las raíces de la ecuación

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0; \quad a \neq 0$$

+ − + − +

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_3 x_4 = \dfrac{c}{a}$
- $x_1 x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_3 x_4 = -\dfrac{d}{a}$
- $x_1 x_2 x_3 x_4 = \dfrac{e}{a}$

Aplicación

Si la ecuación $x^4 - 5x^2 + x - 2 = 0$ de raíces m, n, p y q. Calcule

$$S = (m^4 - 5m^2) + (n^4 - 5n^2) + (p^4 - 5p^2) + (q^4 - 5q^2)$$

A) 26 B) 15 C) 8 D) 4 E) 6

Resolución

$x^4 - 5x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x^4 - 5x^2 = 2 - x$

Remp. la soluciones : $m; n; p; q$

$m^4 - 5m^2 = 2 - m$

$n^4 - 5n^2 = 2 - n$

$p^4 - 5p^2 = 2 - p$

$q^4 - 5q^2 = 2 - q$

(+)

luego:

$x^4 + 0x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$

Por Cardano

$m + n + p + q = 0$

$S = 8 - (m + n + p + q)$, con $m + n + p + q = 0$

$\therefore S = 8$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMAS: (PARIDAD DE RAÍCES)

- Sea un polinomio de grado mayor o igual a 2 de coeficientes racionales tal que si

una raíz es	otra raíz es
$a+\sqrt{b}$	$a-\sqrt{b}$

Donde $a \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \in I$

- Sea un polinomio de grado mayor o igual a 2 de coeficientes reales tal que si

una raíz es	otra raíz es
$a+bi$	$a-bi$

Donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}-\{0\}$

- Sea un polinomio de grado mayor o igual a 4 de coeficientes racionales tal que si

una raíz es	otras raíces son
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$; $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $-\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Donde $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b} \in I$

Aplicación

Si $3+\sqrt{2}$ es raíz de la ecuación cúbica

$$x^3-7x^2+mx+n=0;\ \{m;n\}\subset\mathbb{Q}.$$

Determine $m+n$.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 9 E) 12

Resolución

Como una raíz

$x_1=3+\sqrt{2}$ $\xrightarrow{\text{Por Paridad}}$ $x_2=3-\sqrt{2}$

Por Cardano.

• $\underbrace{x_1+x_2}_{6}+x_3=7 \rightarrow x_3=1$ (solución)

reemp. en la ec. la sol. $x_3=1$

$(1)^3-7(1)^2+m(1)+n=0$

$-6+m+n=0$

$m+n=6$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Calcule la suma de los coeficientes racionales del polinomio mónico de menor grado posible que acepte como raíces a $1+\sqrt{5}$; $1-i$ y 3.

Resolución

Como la ec tiene raíz

- $x_1 = 1+\sqrt{5}$ Por Paridad $x_2 = 1-\sqrt{5}$ ✓
- $x_3 = 1-i$ Por Paridad $x_4 = 1+i$ ✓
- $x_5 = 3$

reconstruir el $P(x)$

$$P(x) = 1(x-3)(x-(1+\sqrt{5}))(x-(1-\sqrt{5}))(x-(1-i))(x-(1+i))$$

Luego:

$$\Sigma coef = P(1) = (1-3)(1-(1+\sqrt{5}))(1-(1-\sqrt{5}))(1-(1+i))(1-(1-i))$$

$$= (-2)(-\sqrt{5})(\sqrt{5})(-i)(i)$$

$$= -2\sqrt{5}^2 \cdot i^2$$

$i^2 = -1$

$$= 10$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ECUACIÓN FRACCIONARIA

Es aquella ecuación que se caracteriza por presentar a la incógnita como parte del denominador.

Ejemplos:

- $\frac{3x+5}{7}=\frac{1}{x+12}$
- $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=5$

Obs. : Para que exista una fracción, su denominador debe ser distinto de cero.

Aplicación

Si la ecuación

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x+3}=\frac{1}{x-4}+2$$

tiene solución α y β, calcule el valor de $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$.

A) 8 B) -26 C) -208 D) 208 E) 26

Resolución

$$\frac{x+3}{x+2}-1+\frac{x+4}{x+3}-1=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-4} \quad ; \quad x\neq-2,\ x\neq-3,\ x\neq4$$

$$\frac{2x+5}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x-4}$$

$$2x^2-8x+5x-20=x^2+5x+6$$

$$x^2-8x-26=0$$

$\alpha+\beta=8$; $\alpha\beta=-26$

$$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-26)(8)$$

$$=-208$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe